Indicar **claramente** apellido y número de padrón en cada hoja que entregue. Todas las respuestas deben estar **debidamente justificadas**. No se aceptarán cálculos dispersos, poco claros o sin comentarios.

EL EXAMEN SE APRUEBA CON 3 EJERCICIOS BIEN RESUELTOS

Apellido: ……………………………………Nombres:………………………………………………

Padrón:………………………

1. Sea $Q = \{(x,y,z) \in \Re^3 : x^2 + y^2 \le 4 \,;\, 0 \le z \le 9 - x^2 - y^2\}$. Calcular el momento de inercia de Q respecto del eje *z* si su densidad es $\delta(x,y,z) = k.y^2$

2. Hallar el flujo del campo $\vec{F}(x,y,z) = \left(z\sqrt{x^2+z^2} \,,\, y^2+3 \,,\, 9x\sqrt{x^2+z^2}\right)$ a través de la porción del plano $z = 3x$ con $z \ge x^2 + y^2$. Indicar en un gráfico la orientación elegida para la superficie.

3. *a)* Demostrar que el campo $\vec{F}(x,y,z) = \left(6xy\cos(z) + 3x \,, 3x^2\cos(z), -3x^2 y\, sen(z)\right)$ es conservativo.

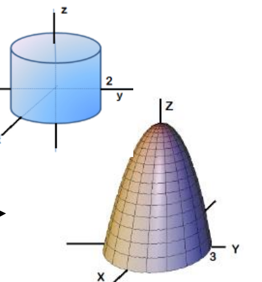
   b) Hallar la derivada direccional de la función potencial del campo $\vec{F}$ definido en a) en el punto (2,-1,0) en la dirección del vector (1,1,0)

4. Hallar el flujo saliente del campo $\vec{F}(x,y,z) = \left(2xz \,, 2y - xe^{-z} \,, y - z^2\right)$a través de la frontera de W, siendo $W = \{(x,y,z) \in \Re^3 : 4 \le x^2 + z^2 \le 9 \,;\, x^2 + y^2 + z^2 \le 16\}$

5. Sea el campo $\vec{F}(x,y) = \left(x\,y^2 \,, Q(x,y)\right)$ de clase C¹ en el conjunto $D \subset \Re^2$ simplemente conexo cuya frontera es la curva C. Hallar $Q(x,y)$, con la condición $Q(0,y) = y^4$, de modo que la integral de línea de $\vec{F}$ sobre la curva *C*, recorrida en sentido positivo, permita medir el volumen del sólido en R^3 limitado inferiormente por *D* y superiormente por $z = x^2 + y^2$.

1. ***Sea*** $Q=\{(x,y,z)\in\Re^3 : x^2+y^2\le 4\,;\,0\le z\le 9-x^2-y^2\}$ ***. Calcular el momento de inercia de Q respecto del eje z si su densidad es*** $\delta(x,y,z)=k.y^2$

Analizo la forma de Q (a través de la superficie frontera):

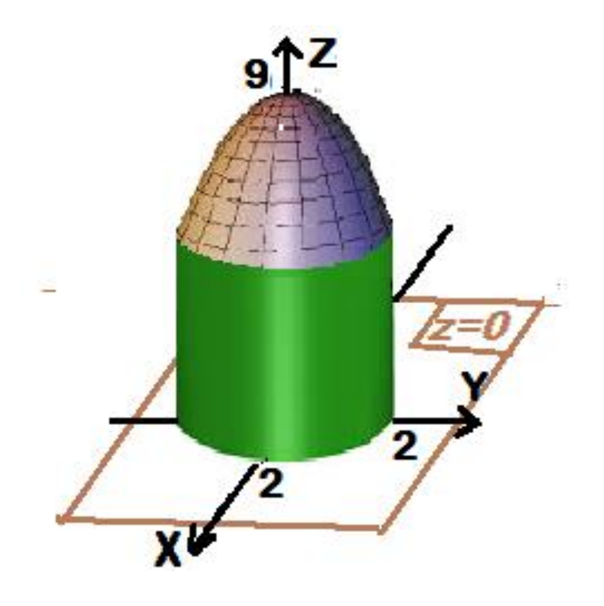


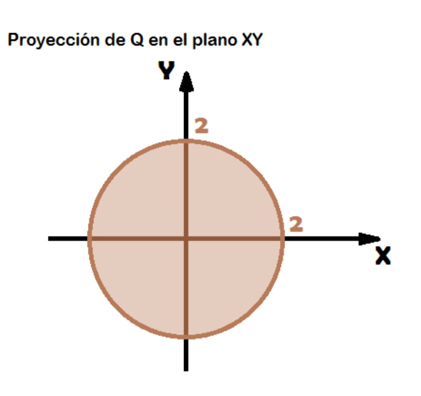
$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z=0 \\ z=9-x^2-y^2=9-(x^2+y^2) \end{cases}$$

➔ Cilindro centrado en el eje Z, radio 2

➔ Plano xy

➔ Paraboloide invertido, "vértice" (0,0,9)





Planteo el cálculo de momento de inercia del eje Z:

$$I_Z=\iiint_Q (x^2+y^2)\delta(x,y,z)dx.dy.dz$$

Por la forma de Q voy a calcular la integral con coordenadas cilíndricas.

$$\begin{cases} x=r.\cos(t) \\ y=r.sen(t) \end{cases} \rightarrow x^2+y^2=r^2 \rightarrow \begin{cases} 0\le z\le 9-(x^2+y^2) \\ 0\le z\le 9-r^2 \end{cases}$$

$0\le r\le 2$
$0\le t\le 2\pi$
$0\le z\le 9-r^2$
$jacobiano=r$

Por lo tanto:

$$I_Z=\iiint_Q (x^2+y^2)k.y^2dx.dy.dz=\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{9-r^2}\overbrace{r^2}^{(x^2+y^2)}\ \overbrace{.k.r^2sen^2(t)}^{k.y^2}.\overbrace{r}^{jac}\ dz.dr.dt=$$

$$=k\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{9-r^2}r^5.sen^2(t)dz.dr.dt=k\int_0^{2\pi}\int_0^2\overbrace{r^5.sen^2(t).(9-r^2)}^{sen^2(t).(9r^5-r^7)}.dr.dt=$$

$$=k\int_0^{2\pi}sen^2(t).\left(\frac{9r^6}{6}-\frac{r^8}{8}\right)\Big|_0^2 dt=k\int_0^{2\pi}sen^2(t).64dt=64.k.\pi$$

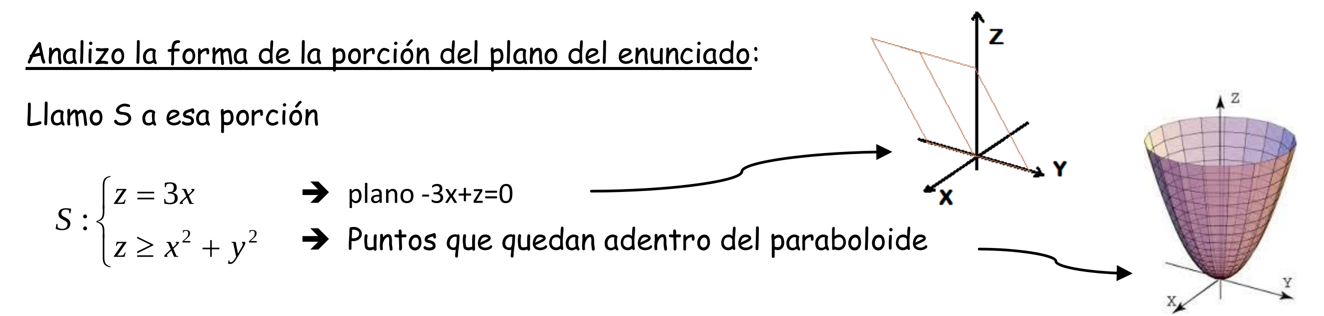
$$\boxed{I_Z=64k\pi}$$

2. *Hallar el flujo del campo $\vec{F}(x,y,z)=\left(z\sqrt{x^2+z^2}\ ,\ y^2+3\ ,\ 9x\sqrt{x^2+z^2}\right)$ a través de la porción del plano z = 3x con z ≥ x^2 + y^2. Indicar en un gráfico la orientación elegida para la superficie*

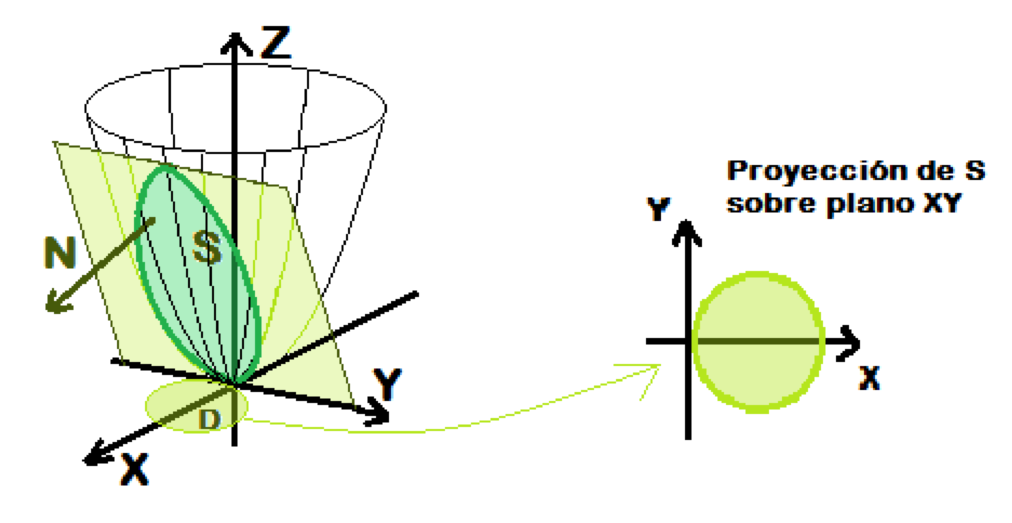
<u>Analizo la forma de la porción del plano del enunciado</u>:

Llamo S a esa porción

$$S:\begin{cases} z=3x & \rightarrow \text{ plano } -3x+z=0 \\ z\geq x^2+y^2 & \rightarrow \text{ Puntos que quedan adentro del paraboloide} \end{cases}$$



S está formado por todos los puntos del plano z = 3x que quedan adentro del paraboloide.



<u>Calculo el flujo sobre la superficie S</u>:

Parametrizo el plano donde está contenida S:

$$\gamma(u,v)=(u,v,3u)$$

$$\left.\begin{aligned}\gamma'u&=(1,0,3)\\ \gamma'v&=(0,1,0)\end{aligned}\right\rangle \rightarrow N=(3,0,-1)\rightarrow \|N\|=\sqrt{10}$$

$$\iint_S \vec{F}.d\vec{s}=\iint_S \vec{F}.\breve{n}.ds=\iint_D \vec{F}(\gamma(u,v)).\overbrace{\frac{N}{\|N\|}}^{\breve{n}}\overbrace{\|N\|du.dv}^{ds}=$$

$$==\iint_D\left(3u\sqrt{u^2+(3u)^2}\ ,\ v^2+3\ ,\ 9u\sqrt{u^2+(3u)^2}\right).(3,0,-1).du.dv=$$

$$=\iint_D 9u\sqrt{u^2+(3u)^2}-9u\sqrt{u^2+(3u)^2}.du.dv=0$$

$$\boxed{\iint_S \vec{F}.d\vec{s}=0}$$

3. a) Demostrar que el campo $\vec{F}(x,y,z) = \left(6xy\cos(z) + 3x\ ,3x^2\cos(z), -3x^2y\ sen(z)\right)$ es conservativo

<u>Analizo si se cumplen las condiciones para ser campo conservativo</u>:

- ✓ $Dom(\vec{F}) = \Re^3$ → el dominio es un abierto simplemente conexo √
- ✓ Sea $\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z),\ Q(x,y,z), R(x,y,z))\ ; \vec{F} \in C^{\infty}(\Re^{3.})$, pues P(x,y,z), Q(x,y,z) y R(x,y,z) son sumas algebraicas de funciones elementales (polinomios, exponenciales y trigonométricas) → $\vec{F}$ ε C^1 (R^3) √
- ✓ Matriz jacobiana simétrica: para esto hallo el rotor $\vec{F}$ pues si resulta que $rot(\vec{F}) = (0,0,0)$ entonces es irrotacional, que es lo mismo que decir que la matriz jacobiana es simétrica:

$$rot(\vec{F}) = \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\ ;\ \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\ ;\ \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right)$$

$$rot(\vec{F}) = \left(-3x^2 sen(z) - (-3x^2 sen(z)); -6xy\ sen(z) - (-6xy\ sen(z)); 6.x.\cos(z) - 6.x.\cos(z)\right) = (0,0,0)$$

$$rot(\vec{F}) = (0,0,0) \surd$$

Como se cumplen las tres condiciones mencionadas entonces

$\vec{F}$ es campo conservativo

b) Hallar la derivada direccional de la función potencial del campo F definido en a) en el punto (2,-1,0) en la dirección del vector (1,1,0)

En el inciso a) se mostró que F es un campo conservativo $\exists \varphi : \Re^3 \to \Re$ / $\vec{F}(x,y,z) = \nabla\varphi(x,y,z)$ y $\vec{F}(x,y,z) \in C^{\infty}(\Re^3) \to \nabla\varphi(x,y,z) \in C^{\infty}(\Re^3) \to \varphi(x,y,z) \in C^{\infty}(\Re^3) \to \varphi\ es\ diferencible$

Como φ es diferenciable, entonces puedo calcular $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(x,y,z) = \nabla\varphi(x,y,z).\breve{v}$

$$\vec{F}(x,y,z) = \nabla\varphi(x,y,z) = \left(6xy\cos(z) + 3x\ ,3x^2\cos(z), -3x^2y\ sen(z)\right)$$

$$v = (1,1,0) \to \|v\| = \sqrt{2} \to \breve{v} = \frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v}(x,y,z) = \nabla\varphi(x,y,z).\breve{v} = \frac{\left(6xy\cos(z) + 3x + 3x^2\cos(z)\right)}{\sqrt{2}}$$

Especializo en el punto (2,-1,0):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v}(2,-1,0) = \frac{\left(6.2.(-1)\cos(0) + 3.(2) + 3.(2)^2\cos(0)\right)}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

$\frac{\partial \varphi}{\partial v}(2,-1,0) = 3\sqrt{2}$

4. *Hallar el flujo saliente del campo* $\vec{F}(x,y,z)=\left(2xz\,,2y-xe^{-z}\,,y-z^2\right)$ ***a través de la frontera de W, siendo*** $W=\left\{(x,y,z)\in\Re^3 : 4\le x^2+z^2\le 9\,;\,x^2+y^2+z^2\le 16\right\}$

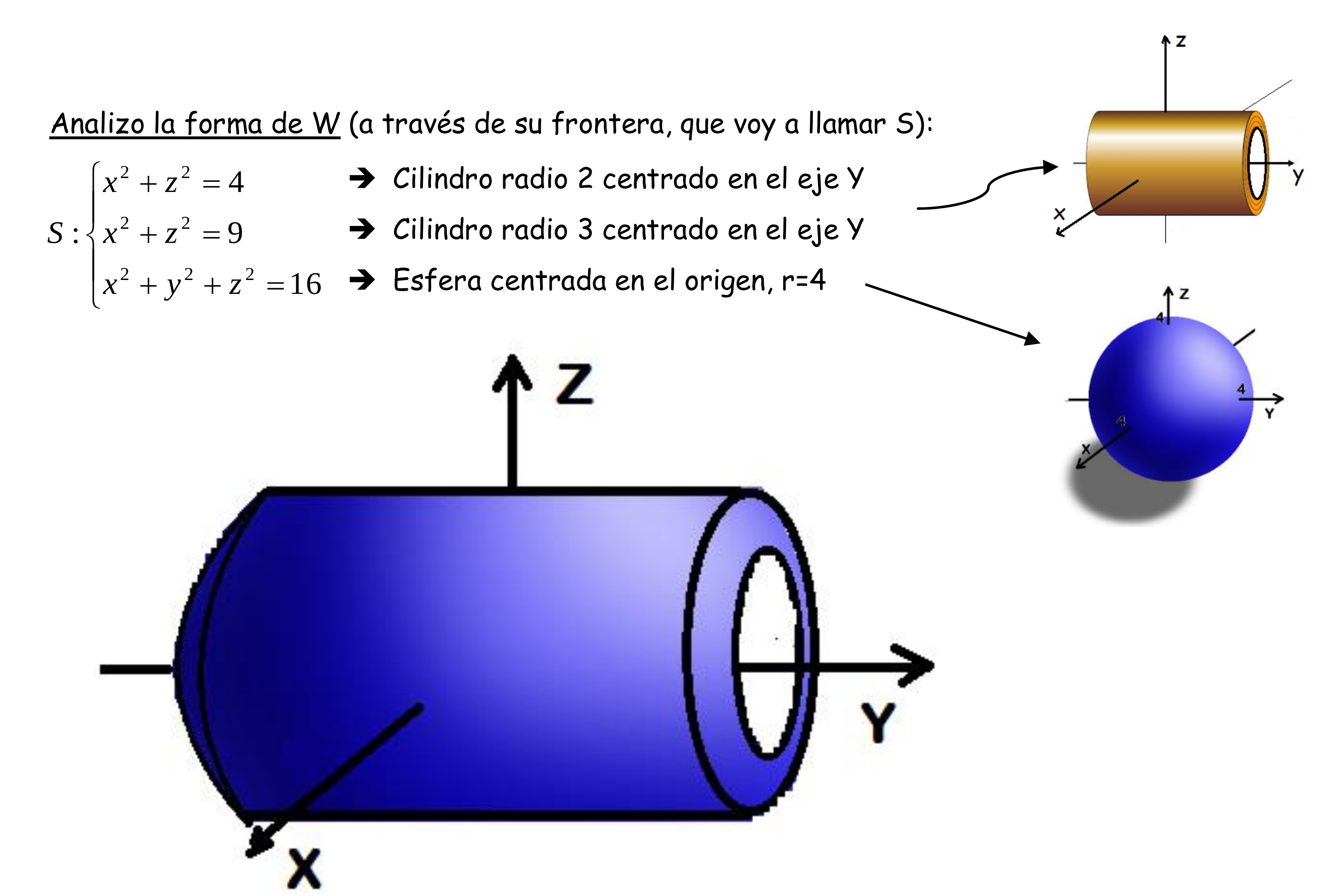
<u>Analizo la forma de W</u> (a través de su frontera, que voy a llamar S):

$$S:\begin{cases} x^2+z^2=4 \\ x^2+z^2=9 \\ x^2+y^2+z^2=16 \end{cases}$$

➔ Cilindro radio 2 centrado en el eje Y

➔ Cilindro radio 3 centrado en el eje Y

➔ Esfera centrada en el origen, r=4



Para calcular el flujo analizo si se cumplen las hipótesis del Teorema de Gauss (o de la divergencia).

I) Sea $\vec{F}(x,y,z)=\left(P(x,y,z),\,Q(x,y,z),R(x,y,z)\right);\vec{F}\in C^{\infty}\left(\Re^{3}\right)$, pues P(x,y,z), Q(x,y,z) y R(x,y,z) son sumas algebraicas de funciones elementales (polinomios, exponenciales y trigonométricas) → $\vec{F}$ ε C^1 (R^3) √

II) *W* es una región en R^3 contenida por la superficie S.

III) S es una superficie orientada hacia el exterior. √

Se verificaron las hipótesis, por lo tanto: $$\iint_S \vec{F}.d\vec{s}=\iiint_W div.\vec{F}\,dVol$$

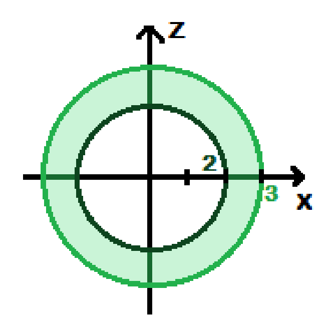
Calculo la divergencia:

$$div.\vec{F}=\frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z)+\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y,z)+\frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)=2z+2-2z=2$$

$$div.\vec{F}=2$$

Por la forma que tiene W considero conveniente usar coordenadas cilíndricas.

Para ver cómo varían los parámetros, observo su proyección sobre el plano xz:



$$\begin{cases} x = r.\cos(t) \\ z = r.sen(t) \end{cases}$$

$$con \begin{cases} 2 \le r \le 3 \\ 0 \le t \le 2\pi \end{cases}$$

$$Jacobiano = r$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \le 16$$
$$r^2 + y^2 \le 16$$
$$y^2 \le 16 - r^2$$
$$|y| \le \sqrt{16 - r^2}$$
$$\boxed{-\sqrt{16 - r^2} \le y \le \sqrt{16 - r^2}}$$

$$\iint_S \vec{F}.d\vec{s} = \iiint_W \overbrace{div.\vec{F}}^{2}\, dVol = 2\int_0^{2\pi}\int_2^3\int_{-\sqrt{16-r^2}}^{\sqrt{16-r^2}} \overbrace{r}^{jacob.}\, .dy.dr.dt =$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_2^3 \overbrace{r.\left(\sqrt{16-r^2} - \left(-\sqrt{16-r^2}\right)\right)}^{2r.\sqrt{16-r^2}dr.dt} dr.dt = 4\int_0^{2\pi}\int_2^3 r.\sqrt{16-r^2}\,dr.dt =$$

$$\overset{\overbrace{}^{x\ tabla\ N°158}}{=} 4\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{3}\sqrt{\left(16-r^2\right)^3}\right)\Bigg|_2^3 .dt = \frac{4}{3}\int_0^{2\pi}\left(-7\sqrt{7} + 24\sqrt{3}\right)dt = \frac{8\pi}{3}\left(-7\sqrt{7} + 24\sqrt{3}\right)$$

$$\boxed{\iint_S \vec{F}.d\vec{s} = \frac{8\pi}{3}\left(-7\sqrt{7} + 24\sqrt{3}\right)}$$

5. Sea el campo $\vec{F}(x,y) = \left(x\,y^2, Q(x,y)\right)$ de clase C [1] en el conjunto $D \subset \Re^2$ simplemente conexo cuya frontera es la curva C. Hallar $Q(x,y)$, con la condición $Q(0,y) = y^4$, de modo que la integral de línea de $\vec{F}$ sobre la curva C, recorrida en sentido positivo, permita medir el volumen del sólido en R³ limitado inferiormente por D y superiormente por $z = x^2 + y^2$.

Como D es una superficie de R^2, se la puede observar como la proyección de $z = x^2 + y^2$ sobre el plano xy. Entonces el volumen lo puedo calcular haciendo:

$$Vol = \iint_D \left(x^2 + y^2\right) dx.dy$$

Además, por enunciado se tiene que:

- ✓ $\vec{F}(x,y) \in C^1(D)$, *siendo*: $\vec{F}(x,y) = \left(P(x,y), Q(x,y)\right)$
- ✓ $dom\left(\vec{F}\right) = D \subset \Re^2$ simplemente conexo
- ✓ C es una curva, frontera de D, por lo que es cerrada, y la supongo regular y suave a trozos

Como se cumplen las hipótesis del Teorema de Green puedo decir que:

$$\oint_{C^+} \vec{g}.d\vec{l} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

Para calcular el volumen pedido en el enunciado, tengo que hallar una función Q(x,y) tal que

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = x^2 + y^2$$

$$P(x,y) = x.y^2 \rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 2xy$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} - 2.x.y = x^2 + y^2 \rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy$$

Ahora integro Q respecto de x para hallar lo pedido en el enunciado:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy \xrightarrow[\text{respecto de } x]{\text{integro m.a.m.}} Q(x,y) = \frac{x^3}{3} + xy^2 + x^2y + \delta(y)$$

Especializo la función hallada en (0,y) para obtener δ(y)

$$Q(0,y) = \frac{0^3}{3} + 0y^2 + 0^2y + \delta(y) = y^4 \rightarrow \delta(y) = y^4$$

Por lo tanto:

$$\boxed{Q(x,y) = \frac{x^3}{3} + xy^2 + x^2y + y^4}$$

¡¡¡ Éxitos en los exámenes !!!

"Los que dicen que es imposible no deberían molestar a los que lo están haciendo" (Albert Einstein)

(si encuentran algún error, algo no está muy claro o está mal explicado, por favor escríbanme un mail a sylvina64@gmail.com así lo corrijo)